$$\frac{1}{x(1+x)^2}=\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(1+x)^2}$$

Par identification on a:

$$\begin{cases}a+b=0\\2a+b+c=0\\a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-b\\c=-2a-b\\a=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=-1\\c=-2+1=-1\\a=1\end{cases}\text{ et par suite:}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{-1}{1+x}+\frac{-1}{(1+x)^2}$$

2) $\alpha\in]1,+\infty[$

a) $\int_1^\alpha f(t)dt=\int_1^\alpha\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$

$$=\left[\ln t-\ln(1+t)+\frac{1}{1+t}\right]_1^\alpha$$

$$=\left(\ln\alpha-\ln(1+\alpha)+\frac{1}{1+\alpha}\right)-\left(\ln 1-\ln 2+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}+\ln 2-\frac{1}{2}$$

Donc:

$$\boxed{\int_1^\alpha f(t)\,dt=\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}+\ln-\frac{1}{2}}$$

b) $A(\alpha)=\int_1^\alpha\frac{\ln t}{(1+t)^3}dt$

Integrant par parties:

$$U(t)=\ln t\to U'(t)=\frac{1}{t}$$

$$V'(t)=\frac{1}{(1+t)^3}\to V(t)=-\frac{1}{2(1+t)^2}$$

Donc:

$$A(\alpha)=\left[-\frac{1}{2(1+t)}\ln t\right]_1^\alpha+\frac{1}{2}\int_1^\alpha\frac{1}{t(1+t)^2}dt$$

$$=-\frac{1}{2(1+\alpha)}\ln\alpha+\frac{1}{2}\int_1^\alpha f(t)dt$$

Par suite d'après 2) a)

$$A(\alpha)=-\frac{1}{2(1+\alpha)}\ln\alpha+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+1}+\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{\ln\alpha}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{1}{2(1+\alpha)}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}$$

Donc :

$$\boxed{A(\alpha)=\frac{1}{2(1+\alpha)}[-\ln\alpha+1]+\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}+\ln 2\right]-\frac{1}{4}}$$

c) $\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}-\frac{\ln\alpha}{2(1+\alpha)}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)+\frac{1}{2(1+\alpha)}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}$$

Avec

*/ $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha}{1+\alpha}=1\Rightarrow\lim_{\alpha\to+\infty}\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}=\ln 1=0$

*/ $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{1+\alpha}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{\alpha}\times\frac{\alpha}{1+\alpha}=0$

*/ $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{1+\alpha}=0$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}}$$

Exercice 5

*/ $\int_0^1 xe^x dx$

$U(x)=x\to U'(x)=1$

$V'(x)=e^x\to V(x)=e^x$

Donc